Chapitre 5 : Théorèmes généraux

Ces théorèmes permettent de résoudre un grand nombre des problèmes de la mécanique.

I - Théorème de moment cinétique :

Rappel :

+ $\vec{\sigma}_o(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}_{R_g}(M)$
+ $\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$

(M est le pt d'application de $\vec{F}$)

I-1. Enoncé du théorème :

Soit $M(m)$ en mvt par rapport à un référentiel galiléen R_g et soit O un pt fixe dans R_g. Par définition ; on a :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M)}{dt}\right)_{R_g} = \sum \vec{M}_o(\vec{f}_{ext})$$

Enoncé : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du pt M par rapport au pt fixe O est égale à la somme des moments des forces appliqués en ce même pt.

En effet :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_o(M)\right)_{R_g} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM} \wedge m\vec{V}_{R_g}(M)\right)$$

$$= \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_g} \wedge m\vec{V}_{R_g}(M) + \vec{OM} \wedge m\vec{\gamma}_{R_g}(M)$$

$$= \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

$$= \vec{OM} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots)$$

$$= \vec{OM} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_2 + \dots$$

$$= \sum_i \vec{M}_o(\vec{F}_i) = \vec{M}(\vec{F})$$

Remarque

+ les théorème reste valable quelque soit le pt fixe dans Rg.

+ si le pt materiel est isolé ($\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$) ou si $\mathcal{M}(F) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_o(M)$ est un vecteur consta

+ De préference, on calcule le moment cinetique % un pt fixe O. Cependant si on considère un pt A mobile dans Rg. On peut écrire :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M)}{dt}\right)_{Rg} = \frac{d}{dt}\left(\vec{AM} \wedge m\vec{V}_{Rg}(M)\right)$$

$$= \left.\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{Rg} \wedge m\vec{V}_{Rg}(M) + \vec{AM} \wedge m\vec{\gamma}_{Rg}(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{Rg} = \left.\frac{d}{dt}\left(\vec{AO} + \vec{OM}\right)\right)_{Rg}$$

$$= -\vec{V}_{Rg}(A) + \vec{V}_{Rg}(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M)}{dt}\right)_{Rg} = \left(\vec{V}_{Rg}(M) - \vec{V}_{Rg}(A)\right) \wedge \vec{p}_{Rg}(M) + \vec{AM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M)}{dt}\right)_{Rg} = -\vec{V}_{Rg}(A) \wedge \vec{p}(M) + \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i)$$

si A est fixe dans Rg $\Rightarrow \vec{V}_{Rg}(A) = \vec{0}$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M)}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_i)$$

+ si M est en mvt dans un réf. non galilée R'.

soit O' un pt fixe dans R'.

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{O'}(M)}{dt}\right)_{R'} = \frac{d}{dt}\left(\vec{O'M} \wedge m\vec{V}_{R'}(M)\right)$$

$$= \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{R'} \wedge m\vec{V}_{R'}(M) + \vec{O'M} \wedge m\vec{\gamma}_{R'}(M)$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{o'}(M)}{dt}\right)_{R'} = \vec{O'M} \wedge \left(\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}\right)$$

$$= \sum_i \mathcal{M}(\vec{F}_i) + \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}_{ic}) + \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}_{ic})$$

I-2 Exemple d'utilisation du th. de moment cinétique :

+ Etude d'un pendule simple :

+ système à étudier : pt M
+ Bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$
+ Repère utilisé : $R(O, X, Y, Z)$

le mvt s'effectue dans le plan vertical Oxy.

+ Th. de moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(M)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}_i)$$
$$= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P})$$

$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ ($\vec{T}$ et $\vec{OM}$ st colin.)

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P}$$
$$= (l \cdot \vec{e_r}) \wedge (mg\, \vec{e_x})$$
$$= m g l\ \vec{e_r} \wedge \vec{e_x}$$
$$= m \cdot g \cdot l\,(\cos\theta\, \vec{e_x} + \sin\theta\, \vec{e_y}) \wedge \vec{e_x}$$
$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = -m \cdot g \cdot l \sin\theta\, \vec{e_z}$$

D'autre part :

$$\vec{\sigma}_o(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}_R(M)$$
$$\vec{V}_R(M) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}(l \cdot \vec{e_r})$$
$$= l\dot{\theta}\, \vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o(M) = l\,\vec{e_r} \wedge m(l\dot{\theta}\, \vec{e_\theta})$$
$$= m l^2 \dot{\theta}\, \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_o(M)}{dt} = m l^2 \ddot{\theta}\, \vec{e_z}$$

Th $\Rightarrow$ $m l^2 \ddot{\theta} \vec{e_z} = -mgl\sin\theta \vec{e_z}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$

avec : $\omega^2 = \frac{l}{g}$

Pour des petites oscillations : $\sin\theta \approx \theta$ (θ faible).

l'équation devient : $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

La solution est une fonction sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Ce qui donne T la periode des oscillations :

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Ce résultat est utilisé pour trouver la valeur de la pesenteur g.

II - Th. de l'energie cinétique :

II-1 Travail - Puissance :

soit un pt materiel M(m), en mvt dans un réf. donné R, qui subit une force $\vec{F}$.

le travail élementaire de la force $\vec{F}$ produit un intervalle de temps Δt est $dW = \vec{F}.d\vec{OM}$ où $d\vec{OM}$ est le dép. élémt. effertuer par la particule M

ou aussi : $dW = \vec{F}.\vec{V}.dt$

$\Rightarrow$ le travail de $\vec{F}$ sur un trajet fini M_1M_2

$$W = \int_{M_1M_2} \vec{F}.d\vec{OM} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{V}.dt$$

t_1 : l'instant où M est en M_1.

t_2 : l'instant où M est en M_2.

On définit, la puissance de $\vec{F}$ par :

$$P(\vec{F}) = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{V}_R(M)$$

$$\Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F})\, dt.$$



unités : W (Joule ≡ J)
P (watts ≡ W)

Remarque :

+ W et P dépendent du référentiel dans lequel le mvt est effectué (car ils dépendent de $\vec{OM}$ et $\vec{v}$).

+ si la force $\vec{F}$ appliqué au pt M est une force constante alors :

$$W = \int_{M_1M_2} \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{M_1M_2} \quad \left(\int_{M_1M_2} d\vec{OM} = \vec{M_1M_2}\right)$$

3 Cas à distinguer :

+ si $\vec{F}$ est ⊥ au déplacement,
W = 0 : $\vec{F}$ ne travaille pas c.à.d : $\vec{F}$ ne contribue pas au mvt.

+ si $\vec{F}$ et $\vec{M_1M_2}$ st colinéaires et de sens opposé : W < 0 : $\vec{F}$ est une force résistante c.à.d $\vec{F}$ s'oppose au mvt.

+ si $\vec{F}$ et $\vec{M_1M_2}$ st colinéaires et de même sens ⟹ W > 0 : $\vec{F}$ est une force motrice c.à.d que $\vec{F}$ contribue au mvt.

- $\vec{F}$: force de rappel d'un ressort.

$\vec{F}$ x

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta l \, \vec{e_x} \qquad (\Delta l = \underbrace{l}_{=x} - l_0)$$
$$= -k x \, \vec{e_x}$$

$$d\vec{OM} = dx \, \vec{e_x}$$

$$\Rightarrow dW = -k x \, dx$$

$$W_{1\to 2}(M) = -k \int_{x_1}^{x_2} x \, dx = k\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}\right)$$

II.2 Changement de référentiel :

+ soit un pt M, en mvt par rapport à un réf. R' mobile par rapport à R(fixe).

+ L.C.V : $\vec{V}_R(M) = \vec{V}_{R'}(M) + \vec{V}_e$

$\vec{F} \cdot \vec{V}_R(M) = \vec{F} \cdot \vec{V}_{R'}(M) + \vec{F} \cdot \vec{V}_e$

Puissance absolue — Puissance relative — Puissance d'entrainment

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_a(\vec{F}) \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_r(\vec{F}) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_e(\vec{F}) \, dt$$

$$W_a(\vec{F}) = W_r(\vec{F}) + W_e(\vec{F})$$

On dit que le travail et la puissance st additifs.

Contrairement à l'energie cinétique qui n'est pas additive.

En effet : $E_{Ca} = \frac{1}{2} \cdot m \left(\vec{V}_R(M)\right)^2$

$$\Rightarrow E_{Ca} = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}_{R'}(M) + \vec{V}_e\right)^2$$

$$E_{Ca} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot V_r^2}_{E_{Cr}} + \underbrace{\frac{1}{2} m V_e^2}_{E_{Ce}} + \underbrace{m \vec{V}_r \cdot \vec{V}_e}_{\text{terme supplementaire}}$$

II.3 _ Enoncé du théorème :

+ soit un pt M(m), en mvt dans un réf. galiléen R_g et $\vec{F}$ la résultance des forces appliquées à M.

P.F.D/R_g : $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}_{R_g}(M)$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{V}_{R_g}(M) = m \cdot \frac{d\vec{V}_{R_g}(M)}{dt} \cdot \vec{V}_{R_g}(M)$$

$$= m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d\vec{V}^2}{dt}$$

$$\mathcal{P}(\vec{F}/R_g) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot m V^2\right)$$

Th. de l'energie - Puissance. $\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) \, dt = dE_c$$

$$dW = dE_c$$

sur un trajet fini M_1M_2.

$$\int_{M_1M_2} dW = \int_{M_1M_2} dE_c = \int_{M_1}^{M_2} dE_c$$

$$W_{1\to 2}(\vec{F}) = E_c(M_2) - E_c(M_1)$$

C'est le th. de l'E_c

Enoncé : La variation de l'energie cinétique d'un pt mat. M entre les positions M_1 et M_2 est égale au travail des forces s'exercent sur M.

+ si maintenant, le pt M en mvt de un réf. R' non galiléen :

P.F.D / R' : $m\,\vec{\gamma}_{R'}(M) = \vec{F} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}}$

$$m\,\frac{d\vec{V_r}}{dt}\cdot\vec{V_r} = \vec{F}\cdot\vec{V_r} + \vec{f_{ie}}\cdot\vec{V_r} + \underbrace{\vec{f_{ic}}\cdot\vec{V_r}}_{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m V_r^2\right) = P_r(\vec{F}) + P(\vec{F_{ie}})$$

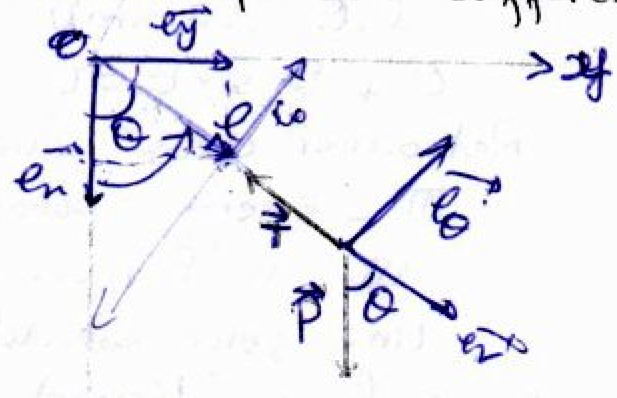
$$\frac{d}{dt}(E_{c_r}) = P_r(\vec{F}) + P(\vec{F_{ie}})$$

$$\Rightarrow \int_{M_1}^{M_2} dE_{c_r} = \int_{t_1}^{t_2} P_r(\vec{F})\,dt + \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F_{ie}})\,dt$$

$$E_{c_r}(M_2) - E_{c_r}(M_1) = W_{r\,1\to 2}(\vec{F}) + W_{1\to 2}(\vec{F_{ie}})$$

+ Reprendre l'exemple du pendule.

Cherchons l'équation différentielle



$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\delta W}{dt}(\vec{F}_{ext})$$

+ $dE_c = ?$

$\delta W(\vec{T}) = ?$

$\delta W(\vec{P}) = ?$

+ $E_c = \frac{1}{2} . m V^2$

$\vec{V} = l\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \Rightarrow V = l\dot{\theta}$

$E_c = \frac{1}{2} m\, l^2 (\dot{\theta})^2$

$\frac{dE_c}{dt} = m . l^2 \ddot{\theta}\dot{\theta}$

+ $\delta W(\vec{T}) = \vec{T} . d\vec{OM}$

$\vec{OM} = l . \vec{e_r}$

$d\vec{OM} = l d\theta\, \vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \delta W(\vec{T}) = -T\vec{e_r} . (l\, d\theta)\, \vec{e_\theta} = 0$

+ $\delta W(\vec{P}) = \vec{P} . d\vec{OM}$

$= m g\, \vec{e_x}\, l\, d\theta\, \vec{e_\theta}$

$= m g\, l\, d\theta\, \vec{e_x}(-\sin\theta\, \vec{e_x} + \cos\theta\, \vec{e_y})$

$= -m g\, l \sin\theta\, d\theta$

$\frac{\delta W}{\delta t}(\vec{P}) = -m g\, l \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$

$= -m g\, l \sin\theta . \dot{\theta}$

$\Rightarrow m l^2 \ddot{\theta}\dot{\theta} = -m g l \sin\theta . \dot{\theta}$

$l . \ddot{\theta} = -g \sin\theta$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$

Retrouver cette équation en utilisant P.F.D.

III _ Energie potentielle :

III _ 1 Forces conservatives :

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi par son pt d'application.



$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

W ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

* si le travail d'une force $\vec{F}$ dépend du trajet suivi.

⇒ On dit qu'elle est non conservative.

Exemple :

forces conservatives
- $\vec{P}$: Poids
- Force électrostatique $\vec{F_e} = q \cdot \vec{E}$

forces non conservatives : - force de frottement

III - 2 Energie potentiel :

le travail d'une force conservative ne dépend que de l'état initial et l'état final d'un pt M. elle peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelé énergie potentielle en écrivant :

$$E_p(M_2) - E_p(M_1) = -W_{1\to2}$$

à partir de laquelle on va déduire :

$$\Leftrightarrow \Delta E_p = -W_{1\to2}(\vec{F})$$

$$dE_p = -dW(\vec{F})$$

$$= -\vec{F} \cdot \vec{dOM} \quad (1)$$

Or pour une fonction scalaire f, on a :

$$df = \vec{grad}\, f \cdot \vec{dOM}$$

$$\Rightarrow dE_p = \vec{grad}\, E_p \cdot \vec{dOM} \quad (2)$$

de (1) et (2) : $\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$,

On dit qu'une pt conservative dérive d'une Energie potentiel.



Exemples de calcul

1)* Energie potentiel du pesanteur : E_{pp}

$$dE_{p_p} = -dW(\vec{P})$$
$$= -\vec{P} \cdot d\vec{OM}$$
$$= +m.g\vec{k}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$
$$= m.g\,dz$$

$E_{p_p} = mgz + cte$ à une cste prés

Dans ce cas, par convention, on prend :

$E_p(z=0) = 0$ (Au sol).

$\Rightarrow E_{p_p} = mgz$

* L'energie potentiel de pesanteur E_{pp} augmente avec l'altitude alors elle dépend de la position de M par rapport au sol.

Cette energie est dûe à l'interaction du solide avec la terre.

2). Energie potentiel electrostatique :

* Force electrostatique : appliqué d'une charge q :

$\vec{F} = q.\vec{E} = -q\,\vec{grad}\,V$

où V est le potentiel electrostatique.

$\vec{F} = -grad(qV)$

$\Rightarrow$ la quantité (qV) représente alors l'energie potentiel électrostatique :

$E_p = qV$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F_e}) = -\Delta E_p$$
$$= -(E_{p_B} - E_{p_A})$$
$$W_{A\to B}(\vec{F_e}) = q(V_A - V_B)$$

3). Travail d'une force de rappel d'un ressort : $dE_p = -dW(\vec{F_r})$

$$= (-Kx\vec{i}).dx\vec{i}$$
$$= Kx\,dx$$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2 + cte$

et on prend $E_p(x=0) = 0$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Remarque :

* si un pt materiel M est soumis à plusieurs force conservative : $\vec{F}_{ic} = -\vec{grad}\, E_{p_i}$ l'energie potentiel total de la particule est alors : $E_p(M) = E_{p_1}(M) + E_{p_2}(M) + \dots$

IV - Energie mécanique:

• C'est la somme de l'energie cinetique et l'energie potentiel d'un pt M dans un referentiel donné R.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} + \dots$

IV - 1 Conservation de l'energie mécanique

D'après le T.E.C , on a :

$$\Delta E_c = \sum W_{1\to 2}(\vec{F}_{ext})$$

$$= \sum W_{1\to 2}(\vec{F}^{c}_{ext}) + \sum W_{1\to 2}(\vec{F}^{nc}_{ext})$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + \sum W_{1\to 2}(\vec{F}^{nc}_{ext})$$

$$E_{c_2} - E_{c_1} = -(E_{p_2} - E_{p_1}) + \sum W_{1\to 2}(\vec{F}^{nc}_{ext})$$

$$\underbrace{(E_{c_2} + E_{p_2})}_{E_{m_2}} - \underbrace{(E_{p_1} + E_{c_1})}_{E_{m_1}} = \sum W_{1\to 2}(\vec{F}^{nc}_{ext})$$

$$\Delta E_m = \sum W_{1\to 2}(\vec{F}^{nc}_{ext})$$

la variation de l'energie mécanique est égale au travail de la résultante des forces non conservatives appliquées à M.

* si le pt M est soumis uniquement à des forces conservatives :

$\Rightarrow \Delta E_m = 0 \quad (E_{m_2} = E_{m_1})$

$E_m = cste$: on dit que l'energie mécanique est une cste de mvt

On dit aussi que Em se conserve au cours du mvt.

une fonction conservative possède 3 propriétés :

- $W(\vec{F})$ ne dépend pas du trajet
- $\vec{F}$ dérive d'une Ep.
- Em(M) est constant.

Une masse m mobile sans frottement sur un axe horizontal (Ox) est ramené par une force $\vec{F}$ vers le pt O. $\vec{F} = -kx\vec{i}$

* forces exterieur : $\vec{P}, \vec{R}, \vec{F}$

$\vec{P}$ et $\vec{R}$ ⊥ au deplacement :

$\Rightarrow W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$ (Ep associée à $\vec{F} = -kx\vec{i}$)

$E_m = E_c + E_p$

$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

le pt est soumis à $\vec{F}$ qui est une force conservative.

$\Rightarrow E_m(M) = cste$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

$m \ddot{x} \dot{x} + k \dot{x} x = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} = 0$ Equation differentielle du mvt

V - Equilibre d'un pt M soumis à une force conservatives

V.1 positions d'équilibre.

Pour simplifier on supposera que le pt M est soumis à une force conservative $\vec{F}$ et il se déplace sur un axe horizontal (Ox)

$\vec{F} = F_x(x)\, \vec{e_x}$ $(\vec{F} // Ox)$

Le pt M est dans une position d'équilibre si : $F_x = 0$

$\vec{F}$ est constante $\Rightarrow \vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$

$\Rightarrow F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

$\Rightarrow \left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_0} = 0$

les position d'equilibre s'obtiennent alors en cherchant les extrimums de $E_p(x)$

V.2 stabilité :

Plaçons au pt x_0 qu'est une position d'équilibre et effectuant un petit déplacement $(x - x_0)$ à partir de cette position.

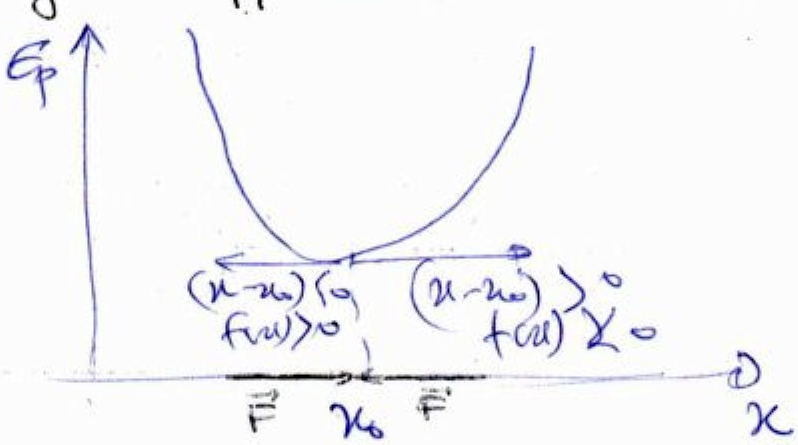
Ecrivons, le D.T de $F(x)$ au pt x_0 au 1er ordre :

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \left.\frac{dF(x)}{dx}\right)_{x_0}$$

$$= -(x - x_0) \cdot \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0}$$

si $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0 \Rightarrow E_p$ est minimal au pt x_0

$\Rightarrow F(x)$ et le déplacement $(x - x_0)$ sont de signes opposés.

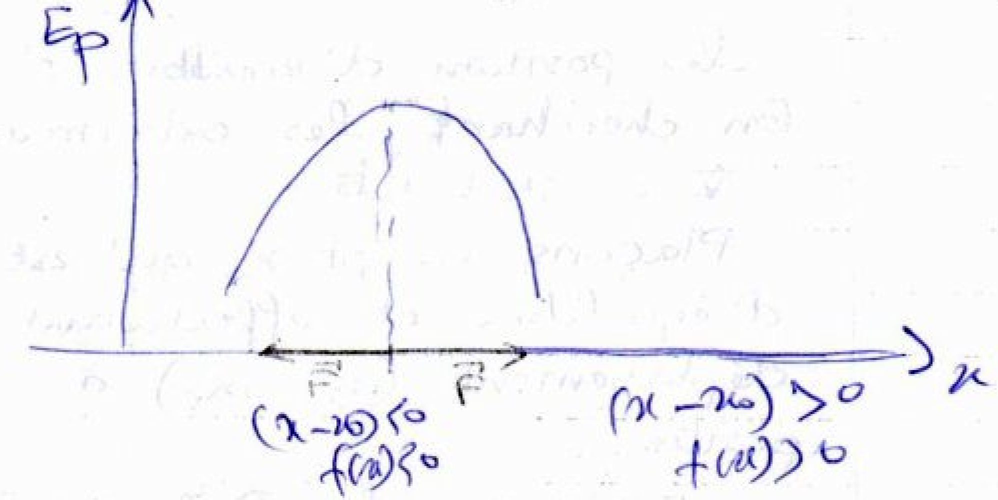




Dans ce cas M est ramené vers sa position d'équilibre. On dit que l'équilibre est stable.

* si $\left.\frac{d^2Ep}{dt}\right)_{x_0} < 0 \Rightarrow$ Ep est maximale au pt x_0

$\Rightarrow F(x)$ et $(x - x_0)$ sont de même signe.



le pt M tend à s'écarter de sa position d'equilibre. l'équilibre est dit instable


ETUSUP.com